השכלה

חוזרים בתבונה

התנועה ליהדות חופשית

חשבון בסיסי

פרויקט השכלה : גישה חופשית לידע ולמיומנויות חיים

תוכן עניינים

חשבון בסיסי הוא ספר לימוד המיועד להקניית יסודות החשבון בצורה מסודרת ופדגוגית. הספר מכסה את כל הנושאים הנדרשים להשלמת פערי ליבה במתמטיקה בסיסית, ומהווה חלק ממסלול היסודות באתר ההשכלה.

הספר מחולק לארבעה שלבים:

שלב א: מושגי יסוד ומספרים

בשלב זה נלמד על מהות המספרים, סוגיהם השונים, ותכונותיהם הבסיסיות - כולל מספרים ראשוניים, מספרים שליליים, סימני התחלקות ופירוק לגורמים.

שלב ב: ארבע פעולות החשבון

בשלב זה נלמד את פעולות החשבון הבסיסיות: חיבור, חיסור, כפל וחילוק, וכן חזקות ושורשים.

שלב ג: שברים

בשלב זה נלמד את עולם השברים על כל גווניו: שברים פשוטים ומדומים, צמצום והרחבה, פעולות חשבון עם שברים, שברים עשרוניים ועוד.

שלב ד: אחוזים

בשלב זה נלמד על אחוזים, חישוב תמורת האחוז, והקשר בין אחוזים לשברים.

למי הספר מיועד?

הספר מיועד לכל מי שמעוניין לרכוש או לחזק את הידע הבסיסי בחשבון, בין אם כהכנה ללימודים מתקדמים יותר ובין אם כידע כללי שימושי.

איזה ידע קודם נדרש?

לא נדרש ידע קודם.

מבוא

מבוא לחשבון בסיסי

חשבון הוא הענף הבסיסי ביותר של המתמטיקה. הוא עוסק בפעולות שניתן לבצע על מספרים: חיבור, חיסור, כפל וחילוק. הבנת החשבון הבסיסי היא תנאי הכרחי ללימוד כל נושא מתמטי מתקדם יותר, וכן לשימוש יומיומי בחיי היום-יום.

מה נלמד בספר זה?

בספר זה נלמד את כל יסודות החשבון, החל מהכרת המספרים וסוגיהם, דרך ארבע פעולות החשבון, ועד לעולם השברים והאחוזים.

למה חשוב ללמוד חשבון?

חשבון הוא כלי יסודי שמשמש אותנו בכל תחומי החיים: בקניות, בבישול, בניהול תקציב, בעבודה ובלימודים. מי שמבין חשבון טוב יכול להתמודד בקלות עם בעיות מתמטיות יומיומיות ולהתקדם לנושאים מתקדמים כמו אלגברה, גיאומטריה וסטטיסטיקה.

מבנה הספר

הספר מחולק לארבעה שלבים:

- **שלב א** - מושגי יסוד ומספרים: הכרת המספרים, סוגיהם ותכונותיהם.
- **שלב ב** - ארבע פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל, חילוק, חזקות ושורשים.
- **שלב ג** - שברים: כל מה שצריך לדעת על שברים.
- **שלב ד** - אחוזים: הבנת אחוזים והקשר שלהם לשברים.

המספרים

המספרים

מספר הוא מושג בסיסי במתמטיקה, המשמש לביטוי כמות. המספרים הם הכלי המרכזי שבאמצעותו אנו מתארים כמויות, מודדים גדלים, ומבצעים חישובים.

הספרות

מספרים נכתבים באמצעות **ספרות**. הספרות הן עשרה סימנים: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. באמצעות ספרות אלו ניתן לכתוב כל מספר שהוא.

מספרים טבעיים

המספרים הטבעיים הם המספרים שמשמשים לספירה: 1, 2, 3, 4, 5, ... וכן הלאה עד אינסוף. קיימת מחלוקת האם המספר 0 נחשב למספר טבעי, אך בדרך כלל בספר זה נכלול אותו.

מערכת המספרים העשרונית

אנו משתמשים ב**מערכת ספירה עשרונית** (בסיס 10). במערכת זו, מיקום הספרה במספר קובע את ערכה:

- ספרת **האחדות** - הספרה הימנית ביותר
- ספרת **העשרות** - הספרה השנייה מימין
- ספרת **המאות** - הספרה השלישית מימין
- וכן הלאה: אלפים, עשרות אלפים, מאות אלפים, מיליונים...

לדוגמה, במספר 7,352:

- 2 הן אחדות
- 5 הן עשרות (כלומר 50)
- 3 הן מאות (כלומר 300)
- 7 הן אלפים (כלומר 7,000)

ציר המספרים

ניתן לדמיין את המספרים כנקודות על **ציר המספרים** - קו ישר שעליו המספרים מסודרים מקטן לגדול, משמאל לימין.

יחסי סדר בין מספרים

בין כל שני מספרים קיים יחס סדר:

- $a > b$ — a גדול מ-b
- $a < b$ — a קטן מ-b
- $a = b$ — a שווה ל-b

מספרים ראשוניים

מספרים ראשוניים

מספר ראשוני הוא מספר טבעי הגדול מ-1, שמתחלק רק ב-1 ובעצמו. מספרים ראשוניים הם אבני הבניין של כל המספרים הטבעיים.

דוגמאות למספרים ראשוניים

המספרים הראשוניים הראשונים הם: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47...

שימו לב: **2 הוא המספר הראשוני הזוגי היחיד**. כל המספרים הראשוניים האחרים הם אי-זוגיים.

מספרים פריקים

מספר שאינו ראשוני (ואינו 1) נקרא **מספר פריק** (או: מספר מורכב). מספר פריק ניתן לפירוק למכפלה של מספרים ראשוניים.

לדוגמה:

- $6 = 2 \times 3$ (פריק)
- $12 = 2 \times 2 \times 3$ (פריק)
- $15 = 3 \times 5$ (פריק)

איך בודקים אם מספר הוא ראשוני?

כדי לבדוק אם מספר n הוא ראשוני, יש לנסות לחלק אותו בכל המספרים הראשוניים עד $\sqrt{n}$. אם אף אחד מהם אינו מחלק את n ללא שארית, המספר הוא ראשוני.

הנפה של ארטוסתנס

שיטה עתיקה למציאת מספרים ראשוניים היא **הנפה של ארטוסתנס**:

1. כותבים את כל המספרים מ-2 ועד הגבול הרצוי.

2. מסמנים את 2 כראשוני, ומוחקים את כל הכפולות שלו.
3. עוברים למספר הבא שלא נמחק, מסמנים אותו כראשוני, ומוחקים את כל כפולותיו.
4. חוזרים על התהליך עד שמגיעים לשורש הגבול.

משפט יסודי

המשפט היסודי של האריתמטיקה קובע שכל מספר טבעי הגדול מ-1 ניתן לפירוק באופן יחיד (עד כדי סדר) למכפלה של מספרים ראשוניים.

איברים

איברים

איבר (או: **אלמנט**) הוא כל אחד מהמספרים המשתתפים בפעולה חשבונית. הבנת המושג "איבר" חשובה לשימוש נכון במתמטיקה.

איברים בפעולות חשבון

בכל פעולה חשבונית יש איברים שנקראים בשמות שונים:

חיבור

$$3 + 5 = 8$$

3 ו-5 הם ה**מחוברים** (או: **האגפים**), ו-8 הוא ה**סכום**.

חיסור

$$9 - 4 = 5$$

9 הוא ה**מחוסר**, 4 הוא ה**מחסר**, ו-5 הוא ה**הפרש**.

כפל

$$3 \times 7 = 21$$

3 ו-7 הם ה**גורמים** (או: **הכפולים**), ו-21 הוא ה**מכפלה**.

חילוק

$$20 \div 4 = 5$$

20 הוא ה**מחולק**, 4 הוא ה**מחלק**, ו-5 הוא ה**מנה**.

איבר ניטרלי

איבר ניטרלי הוא מספר שכאשר מפעילים עליו פעולה מסוימת עם מספר אחר, התוצאה היא אותו מספר:

- באיבר ניטרלי לחיבור: $a + 0 = a$ (האיבר הניטרלי הוא 0)
- באיבר ניטרלי לכפל: $a \times 1 = a$ (האיבר הניטרלי הוא 1)

מספרים שליליים

מספרים שליליים

מספרים שליליים הם מספרים שערכם קטן מאפס. הם מסומנים בסימן מינוס (−) לפני המספר.

ציר המספרים המורחב

כאשר מרחיבים את ציר המספרים שמאלה מעבר לאפס, מקבלים את המספרים השליליים: ... , −4 , −3 , −2 , −1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...

המספרים החיוביים נמצאים מימין לאפס, והשליליים משמאלו.

מספרים שלמים

המספרים השלמים כוללים את כל המספרים הטבעיים, את האפס, ואת המספרים השליליים. מסמנים את קבוצת המספרים השלמים באות $\mathbb{Z}$.

ערך מוחלט

הערך המוחלט של מספר הוא המרחק שלו מאפס על ציר המספרים, ללא התחשבות בכיוון:

- $|5| = 5$
- $|-5| = 5$
- $|0| = 0$

חוקים בסיסיים

- מספר שלילי קטן תמיד מכל מספר חיובי
- ככל שמספר שלילי "גדול יותר" בערכו המוחלט, כך הוא קטן יותר: $-10 < -3$
- מכפלת שני מספרים שליליים היא חיובית: $(-2) \times (-3) = 6$
- מכפלת מספר חיובי בשלילי היא שלילית: $2 \times (-3) = -6$

סימני התחלקות

סימני התחלקות

סימני התחלקות (או: **כללי התחלקות**) הם כללים פשוטים שמאפשרים לנו לדעת אם מספר מתחלק במספר אחר ללא שארית, בלי לבצע את החילוק בפועל.

התחלקות ב-2

מספר מתחלק ב-2 אם ספרת האחדות שלו **זוגית** (0, 2, 4, 6, 8).

דוגמה: 174 מתחלק ב-2 (ספרת האחדות היא 4).

התחלקות ב-3

מספר מתחלק ב-3 אם **סכום ספרותיו** מתחלק ב-3.

דוגמה: 243 → $2+4+3 = 9$ → מתחלק ב-3.

התחלקות ב-4

מספר מתחלק ב-4 אם **שתי הספרות האחרונות** שלו יוצרות מספר שמתחלק ב-4.

דוגמה: 1,316 → 16 מתחלק ב-4.

התחלקות ב-5

מספר מתחלק ב-5 אם ספרת האחדות שלו היא **0 או 5**.

התחלקות ב-6

מספר מתחלק ב-6 אם הוא מתחלק גם ב-**2** וגם ב-**3**.

התחלקות ב-8

מספר מתחלק ב-8 אם **שלוש הספרות האחרונות** שלו יוצרות מספר שמתחלק ב-8.

התחלקות ב-9

מספר מתחלק ב-9 אם **סכום ספרותיו** מתחלק ב-9.

דוגמה: 729 ← 7+2+9 = 18 ← 1+8 = 9 ← מתחלק ב-9.

התחלקות ב-10

מספר מתחלק ב-10 אם ספרת האחדות שלו היא **0**.

התחלקות ב-11

מספר מתחלק ב-11 אם ההפרש בין סכום הספרות במקומות האי-זוגיים לסכום הספרות במקומות הזוגיים מתחלק ב-11 (או שווה ל-0).

תרגילים

בדקו אם המספרים הבאים מתחלקים ב-3, ב-4 וב-9:

1. 144
2. 567
3. 1,260
4. 3,024

פירוק לגורמים ראשוניים

פירוק לגורמים ראשוניים

פירוק לגורמים ראשוניים הוא תהליך שבו מפרקים מספר טבעי למכפלה של מספרים ראשוניים. על פי המשפט היסודי של האריתמטיקה, לכל מספר טבעי הגדול מ-1 יש פירוק יחיד (עד כדי סדר הגורמים).

שיטת הפירוק

כדי לפרק מספר לגורמים ראשוניים:

1. בודקים אם המספר מתחלק במספר הראשוני הקטן ביותר (2).
2. אם כן, מחלקים ורושמים את הגורם.
3. ממשיכים לחלק בגורם זה כל עוד אפשר.
4. כשלא ניתן עוד, עוברים לגורם הראשוני הבא (3, 5, 7, ...).
5. ממשיכים עד שהמנה היא 1.

דוגמה מפורטת

נפרק את 360 לגורמים ראשוניים:

- $360 \div 2 = 180$
- $180 \div 2 = 90$
- $90 \div 2 = 45$
- $45 \div 3 = 15$
- $15 \div 3 = 5$
- $5 \div 5 = 1$

לכן: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

שימושים

פירוק לגורמים ראשוניים שימושי למציאת:

- **מחלק משותף מרבי** (מ.מ.ר)
- **כפולה משותפת מזערית** (כ.מ.מ)
- צמצום שברים
- פתרון בעיות במתמטיקה

תרגילים

פרקו לגורמים ראשוניים:

1. 84
2. 150
3. 504
4. 1,000

חיבור

חיבור

חיבור הוא פעולה חשבונית בסיסית המשלבת שני מספרים (או יותר) למספר אחד הנקרא **סכום**. הסימן המקובל לחיבור הוא +.

מושגים בסיסיים

$$a + b = c$$

כאשר a ו-b הם ה**מחוברים** ו-c הוא ה**סכום**.

תכונות החיבור

- **חוק החילוף (קומוטטיביות)**: $a + b = b + a$
- **חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות)**: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **איבר ניטרלי**: $a + 0 = a$

חיבור בטור

כדי לחבר מספרים גדולים, כותבים אותם בטור כך שהספרות מיושרות לפי מקומן (אחדות מתחת לאחדות, עשרות מתחת לעשרות):

```
 347
+ 286
------
 633
```

מתחילים מספרת האחדות: 6+7=13. כותבים 3 ומעבירים 1 לעשרות (**נשא**).

תרגילים

חשבו:

1. $45 + 37 =$
2. $128 + 256 =$
3. $1,999 + 1 =$
4. $456 + 789 =$
5. $12 + 35 + 48 =$

חיסור

חיסור

חיסור הוא פעולה חשבונית שמטרתה למצוא את ההפרש בין שני מספרים. הסימן המקובל לחיסור הוא −.

מושגים בסיסיים

$$a - b = c$$

כאשר a הוא ה**מחוסר**, b הוא ה**מחסר**, ו-c הוא ה**הפרש**.

תכונות החיסור

שימו לב: חיסור **אינו** קומוטטיבי!

- $5 - 3 \neq 3 - 5$
- חיסור **אינו** אסוציאטיבי: $(10 - 5) - 2 \neq 10 - (5 - 2)$

הקשר בין חיסור לחיבור

חיסור הוא הפעולה ה**הפוכה** לחיבור: אם $a + b = c$, אז $c - b = a$ וגם $c - a = b$.

חיסור בטור

כדי לחסר מספרים גדולים, כותבים אותם בטור ומחסרים ספרה ספרה, מימין לשמאל:

523

287 -

236

כשספרה עליונה קטנה מהתחתונה, "לווים" 1 מהספרה שמשמאל.

תרגילים

חשבו:

1. $83 - 47 =$
2. $500 - 264 =$
3. $1,000 - 1 =$
4. $4,321 - 2,567 =$

כפל

כפל

כפל הוא פעולה חשבונית שניתן להבין כחיבור חוזר. הסימן המקובל לכפל הוא × (או ·).

מושגים בסיסיים

$$a \times b = c$$

כאשר a ו-b הם **הגורמים** ו-c היא **המכפלה**.

משמעות הכפל

4×3 משמעו "שלוש פעמים ארבע", כלומר: $4 + 4 + 4 = 12$.

תכונות הכפל

- **חוק החילוף:** $a \times b = b \times a$
- **חוק הקיבוץ:** $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- **חוק הפילוג:** $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- **איבר ניטרלי:** $a \times 1 = a$
- **כפל באפס:** $a \times 0 = 0$

לוח הכפל

לוח הכפל (טבלת הכפל) הוא כלי בסיסי שחשוב לשנן:

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

כפל באמצעות האצבעות

ניתן להשתמש באצבעות לחישוב כפל בלוח ה-9:

1. פרשו את עשר האצבעות לפניכם.
2. כדי לחשב $9 \times n$, קפלו את האצבע ה-n מצד שמאל.
3. מספר האצבעות משמאל לאצבע המקופלת = ספרת העשרות.
4. מספר האצבעות מימין לאצבע המקופלת = ספרת האחדות.

כפל בטור

כפל מספרים רב-ספרתיים נעשה בטור: כופלים כל ספרה בנפרד ומחברים את התוצאות החלקיות.

תרגילים

חשבו:

1. $7 \times 8 =$
2. $12 \times 15 =$
3. $23 \times 47 =$
4. $100 \times 56 =$

חילוק

חילוק

חילוק הוא פעולה חשבונית שמטרתה לחלק כמות לחלקים שווים. הסימנים המקובלים לחילוק הם ÷ או / או קו שבר.

מושגים בסיסיים

$$a \div b = c$$

כאשר a הוא ה**מחולק**, b הוא ה**מחלק**, ו-c היא ה**מנה**.

הקשר בין חילוק לכפל

חילוק הוא הפעולה ה**הפוכה** לכפל: אם $a \times b = c$, אז $c \div b = a$.

חילוק עם שארית

לא תמיד חילוק יוצא "בול". במקרה כזה נותרת **שארית**:

$17 \div 5 = 3$ שארית 2

כלומר: $17 = 5 \times 3 + 2$

כללים חשובים

- **חילוק באפס אינו מוגדר!** אי אפשר לחלק מספר כלשהו באפס.
- $a \div 1 = a$
- $0 \div a = 0$ (כאשר $a \neq 0$)
- $a \div a = 1$ (כאשר $a \neq 0$)

תרגילים

חשבו (ציינו שארית אם יש):

1. $56 \div 8 =$
2. $100 \div 7 =$
3. $144 \div 12 =$
4. $250 \div 6 =$

חילוק ארוך

חילוק ארוך

חילוק ארוך הוא שיטה שיטתית לביצוע חילוק של מספרים גדולים. השיטה מאפשרת לחלק כל מספר בכל מספר אחר, צעד אחר צעד.

השלבים בחילוק ארוך

1. **חלק** — בודקים כמה פעמים המחלק נכנס בחלק הראשון של המחולק.
2. **כפל** — כופלים את התוצאה במחלק.
3. **חסר** — מחסרים את המכפלה מהמחולק.
4. **הורד** — מורידים את הספרה הבאה של המחולק.
5. חוזרים על התהליך.

דוגמה מפורטת

נחשב: $7,536 \div 12$

```
     628
   --------
12 | 7536
     72
     ---
      33
      24
     ---
      96
      96
     ---
       0
```

התשובה: $7,536 \div 12 = 628$

דוגמה עם שארית

נחשב: $1,579 \div 7$

```
225
-------
  1579 | 7
    14
    ---
   17
   14
   ---
  39
  35
  ---
  4
```

התשובה: $1,579 \div 7 = 225$ שארית 4

תרגילים

בצעו חילוק ארוך:

1. $4,368 \div 13 =$
2. $9,261 \div 21 =$
3. $5,000 \div 8 =$
4. $12,345 \div 15 =$

סדר פעולות החשבון

סדר פעולות החשבון

כאשר בביטוי חשבוני מופיעות מספר פעולות, חשוב לדעת באיזה **סדר** לבצע אותן. ביצוע בסדר שונה עלול להביא לתוצאה שגויה.

הכלל הבסיסי

סדר הפעולות הוא:

1. **סוגריים** — מחשבים תחילה את מה שבתוך הסוגריים.
2. **חזקות ושורשים** — מחשבים חזקות ושורשים.
3. **כפל וחילוק** — מבצעים משמאל לימין.
4. **חיבור וחיסור** — מבצעים משמאל לימין.

דוגמה

$$2 + 3 \times 4 = ?$$

נכון: קודם כפל, אחר כך חיבור: $2 + 12 = 14$

לא נכון: $5 \times 4 = 20$ (חיבור לפני כפל — שגיאה!)

דוגמה עם סוגריים

$$(2 + 3) \times 4 = ?$$

הסוגריים מציינים שיש לבצע את החיבור תחילה: $5 \times 4 = 20$

סוגריים מקוננים

כאשר יש סוגריים בתוך סוגריים, מתחילים מהסוגריים הפנימיים ביותר:

$$2 \times [3 + (4 - 1)] = 2 \times [3 + 3] = 2 \times 6 = 12$$

איחוד

איחוד (או: **קיבוץ**) הוא פישוט ביטוי חשבוני תוך שימוש נכון בסדר הפעולות.

דוגמה: $5+3\times2-8\div4+1$

שלב 1 (כפל וחילוק): $5+6-2+1$

שלב 2 (חיבור וחיסור, משמאל לימין): $11-2+1=10$

תרגילים

חשבו:

1. $8+2\times5=$
2. $(8+2)\times5=$
3. $24\div6+2\times3=$
4. $100-3\times(10+5)=$
5. $[4+(6-2)]\times3=$

חזקה

חזקה

חזקה (העלאה בחזקה) היא פעולה של כפל חוזר של מספר בעצמו.

הגדרה

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ פעמים}}$$

כאשר a נקרא ה**בסיס** ו-n נקרא ה**מעריך** (או: החזקה).

דוגמאות

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $10^4 = 10,000$

חוקי חזקות בסיסיים

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ (לכל $a \neq 0$)
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

חזקה שלילית

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

דוגמה: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

חזקות של 10

חזקות של 10 שימושיות במיוחד:

- $10^1 = 10$
- $10^2 = 100$
- $10^3 = 1,000$
- $10^6 = 1,000,000$ (מיליון)

תרגילים

חשבו:

1. $3^4 =$
2. $7^2 =$
3. $2^{10} =$
4. $4^{-2} =$

שורש

שורש

שורש הוא הפעולה ההפוכה לחזקה. שורש ריבועי של מספר הוא מספר שכאשר מכפילים אותו בעצמו, מקבלים את המספר המקורי.

הגדרה

$\sqrt{a} = b$ אם ורק אם $b^2 = a$ (כאשר $b \geq 0$)

דוגמאות

- $\sqrt{9} = 3$ (כי $3 \times 3 = 9$)
- $\sqrt{25} = 5$ (כי $5 \times 5 = 25$)
- $\sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{144} = 12$

ריבועים שלמים

מספרים שהשורש שלהם הוא מספר שלם נקראים **ריבועים שלמים**: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225...

שורש של מספר שאינו ריבוע שלם

לרוב המספרים, השורש אינו מספר שלם: $\sqrt{2} \approx 1.414$ $\sqrt{3} \approx 1.732$

שורש מסדר גבוה

ניתן לחשב שורשים מסדרים שונים:

- **שורש שלישי:** $\sqrt[3]{8} = 2$ (כי $2^3 = 8$)
- **שורש רביעי:** $\sqrt[4]{16} = 2$ (כי $2^4 = 16$)

חוקי שורשים

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

תרגילים

חשבו:

1. $\sqrt{64} =$
2. $\sqrt{196} =$
3. $\sqrt[3]{27} =$
4. $\sqrt{50} =$ (פשטו)

שברים - הקדמה ומשמעות השבר

שברים - הקדמה ומשמעות השבר

שבר הוא ייצוג של חלק מתוך שלם. שברים מאפשרים לנו לתאר כמויות שאינן מספרים שלמים.

מבנה השבר

שבר נכתב בצורה: $\frac{a}{b}$

כאשר:

- a = **מונה** (המספר העליון) — כמה חלקים לקחנו
- b = **מכנה** (המספר התחתון) — לכמה חלקים שווים חילקנו את השלם

דוגמאות

- $\frac{1}{2}$ — חצי (חלק אחד מתוך שניים)
- $\frac{3}{4}$ — שלושה רבעים (שלושה חלקים מתוך ארבעה)
- $\frac{2}{5}$ — שני חמישיות

משמעות חזותית

אם חולקים עוגה ל-8 חלקים שווים ולוקחים 3, קיבלנו $\frac{3}{8}$ מהעוגה.

כלל חשוב

המכנה לעולם אינו יכול להיות אפס! חילוק באפס אינו מוגדר, ולכן $\frac{a}{0}$ אינו מוגדר.

שברים - השלם ושמות שונים של שבר

שברים - השלם ושמות שונים של שבר

השלם כשבר

כל מספר שלם ניתן לכתוב כשבר עם מכנה 1:

- $5 = \frac{5}{1}$
- $12 = \frac{12}{1}$

שבר השווה לאחד

כאשר המונה שווה למכנה, השבר שווה ל-1:

- $\frac{3}{3} = 1$
- $\frac{7}{7} = 1$

שמות שונים לאותו שבר

לכל שבר יש אינסוף שמות שונים (ייצוגים שקולים): $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{50}{100}$

כל אלה הם שמות שונים לאותו ערך — חצי.

הרחבה וצמצום

- **הרחבה:** כפל מונה ומכנה באותו מספר: $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$
- **צמצום:** חילוק מונה ומכנה באותו מספר: $\frac{a}{b} = \frac{a \div n}{b \div n}$

שברים - שבר פשוט שבר מדומה מספר מעורב

שברים - שבר פשוט, שבר מדומה ומספר מעורב

שבר פשוט (אמיתי)

שבר פשוט (או שבר אמיתי) הוא שבר שבו המונה **קטן** מהמכנה. ערכו קטן מ-1.

דוגמאות: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{4}$

שבר מדומה

שבר מדומה הוא שבר שבו המונה **גדול או שווה** למכנה. ערכו גדול או שווה ל-1.

דוגמאות: $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{11}{4}$

מספר מעורב

מספר מעורב מורכב מחלק שלם ושבר פשוט:

$2\frac{3}{4}$ = שניים ושלושה רבעים

המרת שבר מדומה למספר מעורב

מחלקים את המונה במכנה:

- **המנה** = החלק השלם
- **השארית** = המונה החדש
- **המכנה** נשאר

דוגמה: $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ (כי 11 ÷ 4 = 2 שארית 3)

המרת מספר מעורב לשבר מדומה

$$a\frac{b}{c}=\frac{a\times c+b}{c}$$

דוגמה : $3\frac{2}{5}=\frac{3\times 5+2}{5}=\frac{17}{5}$

תרגילים

1. המירו לשבר מדומה : $4\frac{1}{3}$
2. המירו למספר מעורב : $\frac{23}{6}$
3. סווגו : $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{5}{5}$

שברים - מניית שברים והשוואה

שברים - מניית שברים והשוואה בין שברים

מניית שברים

ניתן למנות שברים על ציר המספרים. לדוגמה, שברים עם מכנה 4: $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4} \ldots$

השוואה בין שברים עם מכנה זהה

כאשר למכנה זהה, השבר עם **המונה הגדול יותר** הוא הגדול יותר:

$\frac{3}{7} > \frac{5}{7}$ (כי $5 > 3$)

השוואה בין שברים עם מכנה שונה

כדי להשוות שברים עם מכנים שונים, יש להביא אותם ל**מכנה משותף**:

להשוות $\frac{2}{3}$ ו-$\frac{3}{5}$:

$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ו-$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

לכן: $\frac{3}{5} > \frac{2}{3}$

שיטת הכפלה צולבת

דרך מהירה להשוות שני שברים:

להשוות $\frac{a}{b}$ ו-$\frac{c}{d}$: משווים את $a \times d$ עם $b \times c$

תרגילים

השוו (השתמשו בסימני $<$, $>$, $=$):

1. $\frac{5}{8} \bigcirc \frac{3}{8}$

2. $\frac{3}{4} \bigcirc \frac{2}{3}$

3. $\frac{2}{3} \bigcirc \frac{4}{6}$

שברים - צמצום והרחבה

שברים - צמצום והרחבה

הרחבת שבר

הרחבת שבר היא כפל המונה והמכנה באותו מספר (שאינו אפס). ערך השבר אינו משתנה.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$$

דוגמה: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

צמצום שבר

צמצום שבר הוא חילוק המונה והמכנה באותו מספר (מחלק משותף). ערך השבר אינו משתנה.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div n}{b \div n}$$

דוגמה: $\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$

שבר מצומצם

שבר הוא **מצומצם** (או: בצורתו הפשוטה ביותר) כאשר אין מספר (מלבד 1) שמחלק גם את המונה וגם את המכנה.

כדי לצמצם שבר עד הסוף, מחלקים את המונה והמכנה ב**מחלק המשותף המרבי** (מ.מ.ר) שלהם.

דוגמה

צמצם: $\frac{24}{36}$

- מ.מ.ר של 24 ו-36 הוא 12
- $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 12}{36 \div 12} = \frac{2}{3}$

תרגולים

צמצמו את השברים הבאים:

1. $\frac{6}{8} =$
2. $\frac{15}{25} =$
3. $\frac{36}{48} =$
4. $\frac{100}{250} =$

הרחיבו את השברים כך שהמכנה יהיה 24:

1. $\frac{1}{3} = \frac{?}{24}$
2. $\frac{5}{6} = \frac{?}{24}$
3. $\frac{3}{8} = \frac{?}{24}$

שברים - מספרים הופכיים ונגדיים

שברים - מספרים הופכיים ונגדיים

מספר הופכי

המספר ההופכי של שבר מתקבל על ידי החלפת המונה והמכנה:

המספר ההופכי של $\frac{a}{b}$ הוא $\frac{b}{a}$

דוגמאות:

- ההופכי של $\frac{2}{3}$ הוא $\frac{3}{2}$
- ההופכי של $\frac{5}{7}$ הוא $\frac{7}{5}$
- ההופכי של $\frac{3}{1} = 3$ הוא $\frac{1}{3}$

תכונה חשובה

מכפלת מספר עם הופכיו שווה תמיד ל-1:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

מספר נגדי

המספר הנגדי של מספר הוא מספר שסכומו עם המספר המקורי שווה לאפס:

המספר הנגדי של a הוא $-a$

דוגמאות:

- הנגדי של $\frac{2}{3}$ הוא $-\frac{2}{3}$
- הנגדי של -5 הוא 5

ההבדל בין הופכי לנגדי

- **הופכי** — קשור לכפל: $a \times a^{-1} = 1$
- **נגדי** — קשור לחיבור: $a + (-a) = 0$

שימו לב

- לאפס **אין** מספר הופכי (כי אי אפשר לחלק באפס)
- לאפס **יש** מספר נגדי: הוא עצמו (כי $0 + 0 = 0$)

שברים - מכנה משותף

שברים - מציאת מכנה משותף ונחיצותו

למה צריך מכנה משותף?

כדי לחבר או לחסר שברים, חייבים שלשני השברים יהיה **אותו מכנה**. לכן יש להביא אותם ל**מכנה משותף**.

מכנה משותף

מכנה משותף הוא מספר שגם המכנה הראשון וגם המכנה השני מתחלקים בו.

כפולה משותפת מזערית (כ.מ.מ)

המכנה המשותף המזערי הוא **הכפולה המשותפת המזערית** (כ.מ.מ) של שני המכנים.

איך מוצאים כ.מ.מ?

שיטה 1 — רישום כפולות:

- כפולות של 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24...
- כפולות של 6: 6, 12, 18, 24...
- כ.מ.מ(4,6) = 12

שיטה 2 — באמצעות פירוק לגורמים ראשוניים:

- $4 = 2^2$
- $6 = 2 \times 3$
- כ.מ.מ = $2^2 \times 3 = 12$

דוגמה

הביאו למכנה משותף: $\frac{2}{3}$ ו-$\frac{5}{4}$

כ.מ.מ(3,4) = 12

$$\frac{5}{4} = \frac{15}{12} , \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

תרגילים

מצאו מכנה משותף והביאו את השברים אליו :

1. $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{2}{5}$
2. $\frac{3}{8}$ ו- $\frac{5}{6}$
3. $\frac{2}{9}$ ו- $\frac{1}{6}$

שברים - חיבור וחיסור

שברים - חיבור וחיסור

חיבור שברים עם מכנה זהה

כאשר למכנה זהה, מחברים את המונים:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

דוגמה: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

חיסור שברים עם מכנה זהה

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

דוגמה: $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

חיבור וחיסור עם מכנים שונים

1. מוצאים **מכנה משותף**
2. מרחיבים כל שבר למכנה המשותף
3. מחברים/מחסרים את המונים

דוגמה: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

מכנה משותף: 12

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

חיבור וחיסור מספרים מעורבים

דוגמה: $2\frac{1}{3} + 1\frac{3}{4}$

שיטה 1 — המרה לשברים מדומים: $\frac{7}{3}+\frac{7}{4}=\frac{28}{12}+\frac{21}{12}=\frac{49}{12}=4\frac{1}{12}$

שיטה 2 — חיבור חלקים שלמים ושברים בנפרד: חלק שלם: 1+2=3. חלק שברי:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$$

סה"כ: $3+1\frac{1}{12}=4\frac{1}{12}$

תרגילים

1. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=$
2. $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=$
3. $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}=$
4. $3\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}=$

שברים - כפל

שברים - כפל

כפל שבר בשלם

כופלים את המונה במספר השלם, המכנה נשאר:

$$\frac{a}{b} \times n = \frac{a \times n}{b}$$

דוגמה: $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

כפל שבר בשבר

כופלים מונה במונה ומכנה במכנה:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

דוגמה: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

טיפ חשוב: צמצום לפני כפל

ניתן לצמצם באלכסון לפני הכפל כדי לפשט את החישוב:

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$$

מצמצמים: 3 עם 9 (מחלקים ב-3), ו-4 עם 8 (מחלקים ב-4):

$$\frac{1}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

כפל מספרים מעורבים

ממירים תחילה למספרים מדומים ואז כופלים:

$$1\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{24}{6} = 4$$

תרגילים

1. $\frac{3}{7} \times 5 =$
2. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} =$
3. $\frac{5}{6} \times \frac{9}{10} =$
4. $2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{3} =$

שברים - חילוק

שברים - חילוק

חילוק שברים

חילוק בשבר שקול ל**כפל בהופכי**:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

דוגמאות

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$6 \div \frac{2}{3} = \frac{6}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

חילוק מספרים מעורבים

ממירים למספרים מדומים ואז מחלקים:

$$3\frac{1}{2} \div 1\frac{3}{4} = \frac{7}{2} \div \frac{7}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{28}{14} = 2$$

תרגילים

1. $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} =$
2. $\frac{3}{8} \div 4 =$
3. $10 \div \frac{5}{2} =$
4. $2\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{6} =$

שברים - שבר עשרוני

שברים - שבר עשרוני

מהו שבר עשרוני?

שבר עשרוני הוא דרך לכתוב שבר באמצעות נקודה עשרונית:

$$\frac{1}{3} = 0.333... \ , \ \frac{3}{4} = 0.75 \ , \ \frac{1}{2} = 0.5$$

המרת שבר פשוט לעשרוני

מחלקים את המונה במכנה:

$$\frac{3}{8} = 3 \div 8 = 0.375$$

המרת שבר עשרוני לפשוט

- $0.7 = \frac{7}{10}$
- $0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
- $0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

חיבור וחיסור שברים עשרוניים

מיישרים את הנקודות העשרוניות:

```
  3.45
+ 2.70
------
  6.15
```

כפל שברים עשרוניים

כופלים כרגיל, וסופרים את מספר הספרות אחרי הנקודה:

$1.5 \times 0.3 = 0.45$ (ספרה אחת + ספרה אחת = שתי ספרות אחרי הנקודה)

חילוק שברים עשרוניים

מזיזים את הנקודה כדי שהמחלק יהיה שלם:

$$6.4 \div 0.8 = 64 \div 8 = 8$$

שברים עשרוניים אינסופיים

ישנם שברים שאינם ניתנים לייצוג עשרוני סופי:

- **מחזוריים:** $\frac{1}{3} = 0.333... = 0.\overline{3}$
- **לא מחזוריים:** למשל $\sqrt{2} = 1.41421356...$

תרגילים

1. המירו: $\frac{5}{8} =$
2. המירו: $0.35 =$
3. $2.4 + 3.75 =$
4. $1.2 \times 0.5 =$

שברים - שורש וחזקה

שברים - שורש וחזקה לשבר פשוט

העלאת שבר בחזקה

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

דוגמאות:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

שורש של שבר

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

דוגמאות:

- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$
- $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

חזקה שלילית של שבר

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

דוגמה: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

חזקה שברית

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

דוגמה : $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

תרגילים

1. $\left(\frac{4}{7}\right)^2 =$
2. $\sqrt{\frac{36}{49}} =$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$
4. $27^{\frac{1}{3}} =$

שברים - שברים שליליים

שברים - שברים שליליים

מהם שברים שליליים?

שבר שלילי הוא שבר שערכו קטן מאפס. ניתן לכתוב שבר שלילי בכמה דרכים שקולות:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

כל שלושת הצורות שקולות ומייצגות את אותו ערך.

חוקי סימנים בשברים

- $\frac{+}{+} = +$ (חיובי)
- $\frac{-}{-} = +$ (חיובי)
- $\frac{+}{-} = -$ (שלילי)
- $\frac{-}{+} = -$ (שלילי)

פעולות עם שברים שליליים

חיבור

$$\frac{-2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$$

חיסור

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

כפל

$$\frac{-2}{3} \times \frac{-3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$ (שלילי כפול שלילי = חיובי)

חילוק

$$\frac{-4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{-4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5}$$

תרגילים

1. $\frac{-3}{4} + \frac{1}{2} =$
2. $\frac{-2}{5} \times \frac{-5}{6} =$
3. $\frac{-7}{8} \div \frac{-1}{4} =$
4. $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} =$

אחוזים - הקדמה

אחוזים - הקדמה

אחוז (סימן: %) פירושו "מתוך מאה". אחוז הוא דרך לבטא שבר שמכנהו 100.

הגדרה

$$x\% = \frac{x}{100}$$

דוגמאות

- $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$ — חצי
- $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$ — רבע
- $1 = \frac{100}{100} = 100\%$ — השלם
- $2 = \frac{200}{100} = 200\%$ — פי שניים

חישוב אחוז ממספר

כדי לחשב x% מ-n: $n \times \frac{x}{100}$

דוגמה: 30% מ-200 = $200 \times \frac{30}{100} = 200 \times 0.3 = 60$

שימושים יומיומיים

אחוזים משמשים בחיי היום-יום בהרבה הקשרים: הנחות בקניות, ריביות, מסים, ציונים, סטטיסטיקה ועוד.

תרגילים

1. כמה זה 20% מ-150?
2. כמה זה 75% מ-80?

3. כמה זה 5% מ-1,000?

אחוזים - תמורת האחוז

אחוזים - תמורת האחוז

מהי תמורת האחוז?

תמורת האחוז היא הערך המספרי שמייצג אחוז אחד מתוך כמות נתונה.

חישוב תמורת האחוז

הפענוח נכשל (שגיאת תחביר): {\displaystyle \text{**תמורת 1\%**} = \frac{\text{**הכמות הכללית**}}{**100**}}

שלושת סוגי השאלות

סוג 1: מציאת חלק (כמה זה x% מ-n?)

$$\text{חלק} = \frac{x}{100} \times n$$

דוגמה: כמה זה 15% מ-400? $\frac{15}{100} \times 400 = 60$

סוג 2: מציאת האחוז (כמה אחוז הוא a מתוך b?)

$$\text{אחוז} = \frac{a}{b} \times 100$$

דוגמה: כמה אחוז הוא 30 מתוך 120? $\frac{30}{120} \times 100 = 25\%$

סוג 3: מציאת השלם (אם x הוא p% מהשלם, מהו השלם?)

$$\text{שלם} = \frac{x \times 100}{p}$$

דוגמה: אם 45 הם 30% מהשלם, מהו השלם? $\frac{45 \times 100}{30} = 150$

תרגילים

1. מצאו 35% מ-600.
2. 48 הם כמה אחוזים מ-200?
3. 60 הם 40% ממספר כלשהו. מהו המספר?

אחוזים - מעברים של אחוזים ושברים

אחוזים - מעברים של אחוזים ושברים

המרת אחוזים לשבר

$$x\% = \frac{x}{100}$$

ומצמצמים במידת האפשר:

- $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
- $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

המרת שבר לאחוזים

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 100\%$$

דוגמאות:

- $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$
- $\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \times 100\% = 87.5\%$

המרת אחוזים לשבר עשרוני

מחלקים ב-100 (מזיזים נקודה שתי ספרות שמאלה):

- $45\% = 0.45$
- $6\% = 0.06$
- $120\% = 1.2$

המרת שבר עשרוני לאחוזים

כופלים ב-100 (מזיזים נקודה שתי ספרות ימינה):

- $0.35 = 35\%$
- $0.08 = 8\%$
- $1.5 = 150\%$

טבלת המרות שימושית

אחוז	שבר פשוט	שבר עשרוני
10%	$\frac{1}{10}$	0.1
20%	$\frac{1}{5}$	0.2
25%	$\frac{1}{4}$	0.25
33.3%	$\frac{1}{3}$	0.333...
50%	$\frac{1}{2}$	0.5
75%	$\frac{3}{4}$	0.75
100%	1	1.0

תרגילים

1. המירו לשבר: 60%, 125%
2. המירו לאחוזים: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$
3. המירו לעשרוני ולשבר: 45%

הופק ע״י חוזרים בתבונה · betvuna.com

מקור התוכן: ויקיספר — רישיון CC BY-SA 4.0 · התוכן עובד והותאם