השכלה

חוזרים בתבונה

התנועה ליהדות חופשית

גיאומטריה בסיסית

פרויקט השכלה : גישה חופשית לידע ולמיומנויות חיים

תוכן עניינים

גיאומטריה בסיסית הוא ספר לימוד המציג את יסודות הגיאומטריה, כולל נוסחאות בסיסיות, צורות גיאומטריות, משפטים חשובים והוכחות.

מהי גיאומטריה?

גיאומטריה (מיוונית: "מדידת הארץ") היא ענף במתמטיקה העוסק בצורות, גדלים, מיקומים יחסיים של צורות, ותכונות המרחב.

מבנה הספר

הספר מכסה נוסחאות בסיסיות, צורות כגון דלתון וריבוע, משפטים מרכזיים כמו משפט פיתגורס ומשפט התיכון, והקדמה להוכחות גיאומטריות.

ידע קודם נדרש

חשבון בסיסי ואלגברה בסיסית.

מבוא

נוסחאות בגיאומטריה - מבוא

מושגי יסוד

- **נקודה** — מיקום במרחב, ללא ממדים. מסומנת באות גדולה: A, B, C.
- **קו (ישר)** — אוסף אינסופי של נקודות בכיוון אחד, נמשך לשני הכיוונים.
- **קרן** — חלק מקו שיש לו התחלה אך אין לו סוף.
- **קטע** — חלק מקו שיש לו התחלה וסוף (שתי נקודות קצה).
- **זווית** — הנוצרת כאשר שתי קרניים יוצאות מאותה נקודה.

סוגי זוויות

- **זווית חדה:** קטנה מ-$90°$
- **זווית ישרה:** שווה ל-$90°$
- **זווית קהה:** בין $90°$ ל-$180°$
- **זווית שטוחה:** שווה ל-$180°$

נוסחאות שטח בסיסיות

- **ריבוע:** $S = a^2$
- **מלבן:** $S = a \times b$
- **משולש:** $S = \dfrac{a \times h}{2}$
- **עיגול:** $S = \pi r^2$
- **טרפז:** $S = \dfrac{(a+b) \times h}{2}$

נוסחאות היקף בסיסיות

- **ריבוע:** $P = 4a$
- **מלבן:** $P = 2(a+b)$
- **עיגול (היקף):** $C = 2\pi r$

דלתון

דלתון

דלתון (kite) הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות זו לזו.

תכונות הדלתון

- שני זוגות של צלעות סמוכות שוות
- האלכסון הראשי (המחבר בין הקודקודים שבהם נפגשות הצלעות השונות) מחלק את הדלתון לשני משולשים חופפים
- האלכסונות מאונכים זה לזה
- האלכסון הראשי חוצה את האלכסון השני
- האלכסון הראשי חוצה את שתי הזוויות שהוא מחבר ביניהן
- זוג אחד של זוויות נגדיות שווה

שטח הדלתון

$$S = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

כאשר d_1 ו-d_2 הם אורכי האלכסונות.

דוגמה

דלתון שאלכסונותיו 6 ס״מ ו-10 ס״מ: $S = \frac{6 \times 10}{2} = 30$ סמ״ר

ריבוע

ריבוע

ריבוע הוא מלבן שכל צלעותיו שוות, או מעוין שכל זוויותיו ישרות ($90°$).

תכונות הריבוע

- כל ארבע הצלעות שוות באורכן
- כל ארבע הזוויות ישרות ($90°$)
- האלכסונים שווים באורכן
- האלכסונים חוצים זה את זה
- האלכסונים מאונכים זה לזה
- האלכסונים חוצים את זוויות הריבוע (כל אלכסון יוצר זוויות של $45°$)

נוסחאות

שטח

$$S = a^2$$

כאשר a הוא אורך הצלע.

היקף

$$P = 4a$$

אלכסון

$$d = a\sqrt{2}$$

דוגמה

ריבוע שצלעו 5 ס"מ:

- שטח: $5^2 = 25$ סמ"ר
- היקף: $4 \times 5 = 20$ ס"מ
- אלכסון: $5\sqrt{2} \approx 7.07$ ס"מ

מחומש

מחומש

מחומש (pentagon) הוא מצולע בעל חמש צלעות וחמישה קודקודים.

מחומש משוכלל

מחומש משוכלל הוא מחומש שבו כל הצלעות שוות וכל הזוויות שוות.

תכונות המחומש המשוכלל

- כל צלעותיו שוות באורכן
- כל זווית פנימית שווה ל-$108°$
- סכום הזוויות הפנימיות: **הפענוח נכשל (שגיאת תחביר): {\displaystyle (5-2) \times 180° = 540°}**
- מספר האלכסונות: $5 = \dfrac{5(5-3)}{2}$

שטח מחומש משוכלל

הפענוח נכשל (שגיאת תחביר): {\displaystyle S = \frac{5a^2}{4} \cdot \tan(54°) \approx 1.72 \cdot a^2}

כאשר a הוא אורך הצלע.

סכום זוויות במצולע כללי

לכל מצולע בעל n צלעות: **הפענוח נכשל (שגיאת תחביר): {\displaystyle \text{סכום הזוויות הפנימיות} = (n-2) \times 180°}**

משפט פיתגורס

משפט פיתגורס

משפט פיתגורס הוא מהמשפטים החשובים ביותר בגיאומטריה. הוא עוסק בקשר בין צלעות משולש ישר-זווית.

הניסוח

במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי שני הניצבים שווה לריבוע היתר:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

כאשר a ו-b הם **הניצבים** (הצלעות היוצרות את הזווית הישרה) ו-c הוא **היתר** (הצלע שמול הזווית הישרה — הצלע הארוכה ביותר).

דוגמה קלאסית

משולש עם ניצבים 3 ו-4: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

אורך היתר הוא 5.

שלשות פיתגוריות

שלשה פיתגורית היא שלושה מספרים טבעיים המקיימים את משפט פיתגורס:

- (3, 4, 5)
- (5, 12, 13)
- (8, 15, 17)
- (7, 24, 25)

שימושים

- חישוב מרחקים

- בדיקת ניצבות
- מציאת אורך צלע חסרה

המשפט ההפוך

אם בנוסחה $a^2 + b^2 = c^2$ מתקיים שוויון, אז המשולש הוא ישר-זווית.

תרגילים

1. מצאו את היתר במשולש עם ניצבים 6 ו-8.
2. מצאו ניצב במשולש עם היתר 13 וניצב 5.
3. האם המשולש עם צלעות 9, 12, 15 הוא ישר-זווית?

משפט התיכון

משפט התיכון

תיכון במשולש הוא קטע המחבר קודקוד עם אמצע הצלע שמולו.

תכונות התיכונות

- לכל משולש יש שלוש תיכונות
- שלוש התיכונות נפגשות בנקודה אחת הנקראת **מרכז הכובד** (centroid)
- מרכז הכובד מחלק כל תיכון ביחס **2:1** מהקודקוד

משפט התיכון

אם m_a הוא אורך התיכון לצלע a, ו-b ו-c הן שתי הצלעות האחרות:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

תיכון למשולש ישר-זווית

במשולש ישר-זווית, **התיכון ליתר** שווה בדיוק ל**חצי היתר**:

$$m_c = \frac{c}{2}$$

שטח

תיכון מחלק את המשולש לשני משולשים **שווי שטח**.

דוגמה

במשולש עם צלעות a=10, b=8, c=6:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \times 64 + 2 \times 36 - 100} = \frac{1}{2}\sqrt{128 + 72 - 100} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$$

הוכחות בגיאומטריה

הוכחות בגיאומטריה

הוכחה גיאומטרית היא תהליך לוגי שבו מוכיחים טענה גיאומטרית צעד אחר צעד, תוך שימוש בהגדרות, משפטים ואקסיומות ידועים.

מבנה הוכחה

1. **נתון** — מה ידוע לנו (נתונים)
2. **להוכיח** — מה רוצים להוכיח
3. **הוכחה** — שרשרת צעדים לוגית
4. **מ.ש.ל** — "מה שהיה להוכיח"

משפטי חפיפה

שני משולשים חופפים (זהים בצורתם ובגודלם) אם מתקיים אחד מהתנאים:

- **צ.צ.צ** — שלוש צלעות שוות
- **צ.ז.צ** — שתי צלעות והזווית שביניהן שוות
- **ז.צ.ז** — שתי זוויות והצלע שביניהן שוות

משפטי דמיון

שני משולשים דומים (אותה צורה, גודל שונה) אם:

- **ז.ז** — שתי זוויות שוות
- **צ.צ.צ** — יחס בין שלוש הצלעות שווה
- **צ.ז.צ** — יחס בין שתי צלעות שווה והזווית שביניהן שווה

דוגמה להוכחה

נתון: ABCD מקבילית. **להוכיח:** האלכסונות חוצות זו את זו.

הוכחה: נסמן O נקודת חיתוך האלכסונות.

במשולשים AOB ו-COD:

- AB = CD (צלעות נגדיות במקבילית)
- זווית OAB = זווית OCD (זוויות מתחלפות)
- זווית OBA = זווית ODC (זוויות מתחלפות)
- לכן המשולשים חופפים (ז.צ.ז)
- לכן AO = CO ו-BO = DO

מ.ש.ל — האלכסונות חוצות זו את זו.